数理解析研究所講究録
672巻 1988年 26-48

Gauss確率場のwhite noise表現

愛知教育大学　野田明男 (Akio Noda)

§1. 序

Gauss過程 $X(t)$ の標準表現の理論(Lévy-Hida-Cramèr の名前で呼ばれる)は、1960年頃に確立され、その後の発展も含めて飛田・櫃田[7]に適切に記述されている(cf. [5])。ここで論じたい中心的な問題は、時間パラメータ $t\in R^1$ を多次元化する際に、Gauss確率場 $X(x)$, $x\in R^n$, の表現として、どんな枠組を採用すべきか、又いったん表現の形を定めたとき、標準表現の理論はどうなるかという事である。

Gauss過程の標準表現

(1.1) $$X(t)=\int_{t_0}^{t} F(t,u)\,\dot{B}(u)\,du,\quad t\geq t_0,$$

に現われる white noise $\dot{B}(u)\,du = dB(u) = \xi\sqrt{du}$ は、パラメータ t が微少時間 dt だけ進む間に X が新たに獲得する random element ξ によって定義された; $\xi = (X(t+dt)-E[X(t+dt)\,|\,X(u);u\leq t])/$(正規化定数) は、$\{X(u);u\leq t\}$ と独立な $N(0,1)$-確率変数である。

一次元パラメータの場合に確立されたこの明確な描像を多次元化できるであろうか。一方向だけという単純なもの動きに比べて、$x \in R^n$ の動きは格段に自由度を増す。我々の idea は、$X(x)$ を記述すべき random element ξ を R^n の種々の部分集合 h に対応させる点に存す。つまりパラメータ x が h の外部から内部に踏み入るとき、新しい random element ξ が発生するとみなす。こうして、部分集合 h の適当な集合 H とその上の測度 $d\nu(h)$ を用意して、

$$X(x) = \int_{[x]} F(x,h)\,\xi\sqrt{d\nu(h)} = \int_{[x]} F(x,h)\,dW(h), \tag{1.2}$$

$[x] = \{h \in H;\ x \in h\}$, という一般的な形の表現に到る(§2)。ここで、W は (H,ν) に基づく Gaussian random measure を示す。

表現 (1.2) を用いて $X(x)$ の構造を解析する、特に飛田の唱導される variational approach を推進していくためには、上述の適当な集合 H というだけでは不十分であろう。我々は2種類の特別な H に着目する(§3)。第一は、半空間 $h_{p,\omega} = \{x \in R^n;\ (x,\omega) > p\}$, $p>0$, $\omega \in S^{n-1}$, のなす集合 H_1 で、n 次元パラメータの Brown 運動

$$B(x) = \int_{[x]} \xi\sqrt{d\nu_0(h_{p,\omega})} = W_0([x]) \tag{1.3}$$

がその典型となる([4])。ν_0 は H_1 上の不変測度、W_0 はそれに基づく H_1 上の white noise。この形の $B(x)$ は、任意の直線上にパラメータを制限すると加法過程になるという著しい性質に

によって特徴づけられ、これにはHilbertの第4問題([1], [17])との深いつながりを見出す。

もう一つのH_2は、互いに直交する方向$e_i=(\delta_{ij})_{j=1}^{n}$を固定して、第一象限の平行移動である$k_{p_1\cdots p_n}=\bigcap_{i=1}^{n} h_{p_i,e_i}$のなす集合である。このクラスの典型は、$H_2$上の不変測度$\tilde{\nu}_0$に対応する<u>$n$次元パラメータのWiener過程</u>

(1.4) $$W(t_1,\cdots,t_n)=\int_{[(t_1,\cdots t_n)]}\xi\sqrt{d\tilde{\nu}_0(k_{p_1\cdots p_n})}=\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n}\dot{W}(p_1,\cdots,p_n)\,dp_1\cdots dp_n,$$

$t_i\geq 0$, である。各方向e_iに関して増加する曲線上をパラメータが動くときWに加法性が生じる。

我々にとって基本的な確率場であるB (resp. W)に対し、パラメータが直線(resp. 増加曲線)から逸れて動き出すとき、どんなGauss過程を生じさせるかという問題は稿を改めて論じる。

上記のH_1, H_2に限定するメリットの一つは、random element ξ $(\leftrightarrow W)$がなじみのwhite noise $\dot{W}(x)$, $x\in R^n$, によってすべて記述される事である。従って飛田[8]で詳述されている(L^2)、あるいはgeneralized Brownian functionalのなす空間$(L^2)^-$という$X(x)$の変分解析に都合のよい土俵が用意される。その上、一次のfunctionalのなす部分空間で済むGaussという枠を越えて、さらにnon-Gaussな確率場に理論を拡張する道が開かれることも期待できる。

最後の§4は、H_1に基づく表現(1.2)の標準性の議論に当てる。H_2に基づく表現に深入りすることはここでは避けたい(cf. [6])。

§2. Gauss確率場の表現の構成

集合Mをパラメータ空間とする一般的なset upから始める；平均0のGauss系$\{X(x); x \in M\}$は、共分散$\Gamma(x, x') = E[X(x) \cdot X(x')]$をもつとする。

XのGaussian random measure Wによる表現とは、適当な測度空間$(\Lambda, d\nu(\lambda))$と核$\{f_i(x, \lambda)\}_{i=1}^N$を用意して、

$$X(x) = \sum_{i=1}^N \int_\Lambda f_i(x, \lambda)\, dW_i(\lambda) \tag{2.1}$$

と表すことである。ここで、$\{W_i\}_{i=1}^N$は(Λ, ν)に基づくGaussian random measureの互いに独立なコピーである。表現式(2.1)は、共分散の一種の分解

$$\Gamma(x, x') = \sum_{i=1}^N \int_\Lambda f_i(x, \lambda) f_i(x', \lambda)\, d\nu(\lambda) \tag{2.2}$$

と同値になる。このような表現はもちろんuniqueではない。我々の目標は、さまざまな表現方法の中から、標準的とみなされるものを探すことである。

表現(2.1)では積分領域が全空間Λで不動のため、パラメータの動きに伴って発生するはずのrandom element ξの有り様が全く見えてこない。ぜひともxと共に変化する積分領域[x]

という因子を表現に組み込みたい。このため、M の部分集合からなる集合 H を Λ として採用し、$[x]=\{h\in H;\ x\in h\}$ と定義する。表現の多重度は簡単に $N=1$ ととると、

(2.3) $$X(x)=\int_{[x]} f(x,h)\,dW(h)$$

の形の表現に行きつく。

"Volterra" 型の核 $f(x,h)$, $h\in[x]$, の効果をこの節と次節では除外して、より制限された形

(2.4) $$X(x)=\int_{[x]} dW(h)=W([x])$$

を考察する。このタイプの X は、X と結びつく M 上の(擬)距離 $d(x,x')=E[(X(x)-X(x'))^2]$ の言葉で特徴づけられる:

(2.5) $$d(x,x')=\|1_{[x]}(h)-1_{[x']}(h)\|^2_{L^2(H,\nu)}=\|1_{[x]}(h)-1_{[x']}(h)\|_{L^1(H,\nu)}。$$

この式は、d が L^1-embeddable な距離となることを示す。

逆に、M 上に与えられた L^1-embeddable な距離 d から出発すると、(2.5) を保証する適当な (H,ν) が存在する([3])。そして、共分散 $\Gamma(x,x')=\{d(x,0)+d(x',0)-d(x,x')\}/2$ をもつ $X(x)$ は、望みの表現 (2.4) を許容する。この場合、(H,ν) の一意性は依然として成り立たないことを注意する([14])。

興味深い例として、指数 $\alpha\in(0,1)$ の fractional Brownian motion $B_\alpha(x)$, $x\in R^n$, を取り上げよう(cf. [20])。B_α に結びつく距離は Euclid 距離の α 乗;

(2.6) $$d_\alpha(x,x')=|x-x'|^\alpha。$$

この d_α に (2.5) を通じて結ばれる (H,ν) の例を３つ挙げる。

第一の H は、開球 $h_{r,y}=\{x\in R^n;\ |x-y|<r/2\}$, $r>0$, $y\in R^n$, からなる集合で、$d\nu(h_{r,y})=(\mathrm{const.})\{r^{-n+1}\int_r^\infty (t^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}}t^{\alpha-n-2}dt\}\,dr\,dy$.

第二の H は、帯状領域 $h_{r,t,\omega}=\{x\in R^n;\ |(x,\omega)-t|<r/2\}$, $r>0$, $t\in R^1$, $\omega\in S^{n-1}$, からなり、$d\nu(h_{r,t,\omega})=(\mathrm{const.})\,r^{\alpha-2}dr\,dt\,d\sigma_0(\omega)$。ここで、$\sigma_0$ は単位球面 S^{n-1} 上の一様確率測度。

第三の H は、Cox process と呼ばれる R^n 上の random points S を用いて構成される。点の集合 $S(\omega)$, $\omega\in(\Omega,P)$, は、intensity $b/2>0$ の Poisson random measure $S_b(\omega)$ を測度 $2\alpha\,db/\Gamma(1-\alpha)b^{\alpha+1}$ に関して混合したもの；各 S_b は、R^n 上の測度 $d\hat{\nu}_0(y)=\frac{n-1}{|S^{n-2}|}\frac{dy}{|y|^{n-1}}$ に基づく, i.e., $A\subset R^n$ に対して、A 内にある点の個数 $\#(S_b(\omega)\cap A)$ は、平均 $\frac{b}{2}\nu_0(A)$ の Poisson 分布に従い、$A\cap A'=\phi$ ならば、$\#(S_b\cap A)$ と $\#(S_b\cap A')$ は互いに独立となる。このとき、部分集合 $h(\omega)=\{x\in R^n;\ \#(S(\omega)\cap V(x))$ が奇数$\}$, $V(x)$ は $\overline{0x}$ を直径にもつ開球, と定義し、$H=\{h(\omega);\ \omega\in\Omega\}$ 上に、測度 $d\nu(h(\omega))=dP(\omega)$ をとれば、(2.5) を通じて d_α を得る。

L^1-embeddable metric の subclass として、ultrametric を取り上げてこの節を閉じる。有限集合 M 上の距離 d は、

(2.7) $$d(x,x'')\le d(x,x')\vee d(x',x''),\quad \forall x,x',x''\in M,$$

を満たすとき、ultrametric という。このような (M,d) は tree 表現を許す ([2])：(M,d) の直径を λ_0 とし、$M=\bigcup_{j_1=1}^{m_1}S_{j_1}$ と分割する。

ここで、$S_{j_1}=\{x\in M\,;\,d(a,x)<\lambda_0\}$はある点$a$の$\lambda_0$-近傍。このとき異なる$S_{j_1}$と$S_{j_1'}$に属する点同士の距離は常に$\lambda_0$になる。次に$\max_{j_1}\mathrm{diameter}(S_{j_1},d)=\lambda_1$とし、各部分集合$S_{j_1}$をさらに$S_{j_1}=\bigcup_{j_2=1}^{m_2(j_1)}S_{j_1j_2}$, $S_{j_1j_2}$はλ_1-近傍, と細分する。この操作を続けて、$\lambda_\ell>\lambda_{\ell+1}=0$と一点集合$\{x\}=S_{j_1j_2\cdots j_{\ell+1}}$に到達する。

さて与えられたdに対応する(H,ν)は、すべての近傍$S_{j_1j_2\cdots j_k}$, $1\le k\le \ell+1$, $1\le j_k\le m_k(j_1\cdots j_{k-1})$, を要素とする有限集合$H$とその上のdiscrete measure $d\nu(\{S_{j_1j_2\cdots j_k}\})=(\lambda_{k-1}-\lambda_k)/2$からなることがわかる。こうして、$(M,d)$のtree表現は、望みの表現

$$X(x)=\sum_{k=1}^{\ell+1}\sqrt{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)/2}\;\xi_{j_1j_2\cdots j_k}\,,\quad \{x\}=S_{j_1j_2\cdots j_{\ell+1}}\,, \tag{2.8}$$

を導く(cf. [19])。ここで、$\xi_{j_1j_2\cdots j_k}$は$N(0,1)$-i.i.d. sequence。

§3. 基本的な確率場—LévyのBrown運動とWiener過程

パラメータ空間$M\subset R^n$なるGauss確率場にもどって、(2.4)型の表現の中で、$X(x)$の解析に都合のよい部分集合hのsystemを探したい。この節では、ある種の加法性(独立増分性)に着眼して2種類のHを見出す。

3-1. LévyのBrown運動とHilbertの第4問題

まずn次元パラメータのBrown運動$B(x)$, $x\in R^n$, から始めると、P. Lévyのoriginalな定義は、$B(x)$の特性として次の2性質を教える:

i) B を支配する確率法則は Euclid 運動群で不変；

ii) R^n の任意の直線 L に対して、B の L への制限 $B_L = \{B(x); x \in L\}$ は標準 Brown 運動に一致する。

Gauss 過程の標準表現を確立する研究過程において、特に Cramèr の研究 ([5]) に明らかであるが、よくわかっている定常過程（標準表現は Karhunen 表現の名で呼ばれる）から非定常過程へと発展して、広い範囲の Gauss 過程を cover したいという意欲が読みとれる。多次元パラメータの場合にも同様の意欲をもって、定常性に相当する Euclid 不変性を上記 i), ii) の条件から除く。

本質的な B についての条件は次のように述べられる：

B) 任意の直線 L に対して、L 上への制限 B_L は加法過程となる。

これに付加条件を課す：

B-1) $B(x), x \in R^n$, は $L^2(\Omega, P)$ の要素として連続である。

B-2) 3点 x, x_0, x' が一直線上にないとき、共分散は、

$$E[(B(x)-B(x_0))(B(x')-B(x_0))] \geq 0 .$$

<u>定義 1</u>. 条件 B), B-1, 2) を満たす Gauss 確率場 $B(x)$ を <u>広義 Lévy の Brown 運動</u>と呼ぶ。

B に結びつく R^n 上の距離 $d(x, x') = E[(B(x) - B(x'))^2]$ は、通常の位相に関して連続であり、条件 B) は次と同値になる：

A) d は直線上で加法的, i.e., x, x_0, x' がこの順序で一直線上にあるとき, $d(x, x_0) + d(x_0, x') = d(x, x')$。

D. Hilbert は Euclid 幾何学の隣に位置する幾何学として、条件 A) を満たす連続な距離 d ([1] では射影距離と呼ばれる) をすべて求めることを第4番目の問題として提出した (1900年)。射影距離空間 (R^n, d) は端的に言えば、直線を測地線にもつ幾何学である。

この問題に関する主な結果を理解するため、まず射影距離 d が平行移動で不変な場合 (Minkowski 幾何学) から始めよう。この場合 O を中心とする対称な凸体 K に付随する norm $\|x\|_K = \sup_{y\in K}(x, y)$ が d を記述する:

$$d(x, x') = \| x - x' \|_K \tag{3.1}$$

Gauss 確率場 $B(x)$ の存在を保証する必須条件 — (3.1) の d は negative type, i.e., 任意の自然数 k, 任意の組 $x_1, \cdots, x_k, x_1', \cdots, x_k' \in R^n$ に対して、

$$\sum_{1\le i<j\le k} d(x_i, x_j) + \sum_{1\le i<j\le k} d(x_i', x_j') \le \sum_{i,j=1}^{k} d(x_i, x_j') \tag{3.2}$$

が成立するとき, K は zonoid と呼ばれる ([16])。2次元の凸体は自動的に (3.2) を満たすので zonoid であるが、$n \geq 3$ では事情が異なる。例えば、negative type な l^p-norm を探すと、$1 \le p \le 2$ に限られる。

さて, zonoid K に付随する norm は次の表現をもつ:

(3.3) $$\|x\|_K = \int_{S^{n-1}} |(x,\omega)|\, d\sigma(\omega).$$

ここで、σ は unique に定まる S^{n-1} 上の有界対称な測度。K が球の場合（$\|x\|_K = |x|$ は l^2-norm）は、もちろん一様測度 σ_0 の定数倍。

S^{n-1} 上の測度 σ は，超平面 $g_{p,\omega} = \{x \in R^n ; (x,\omega) = p\}$ の作る集合 $G = \{g_{p,\omega} ; p \geq 0, \omega \in S^{n-1}\}$ 上の測度 $d\mu(g_{p,\omega}) = dp \otimes d\sigma(\omega)$ を導く。線分 $\overline{xx'}$ と交差するような超平面 g の全体を $[\overline{xx'}] = \{g \in G ; g \cap \overline{xx'} \neq \phi\}$ と記して，(3.3) から容易に積分幾何における有名な一般化された Crofton 公式

(3.4) $$d(x,x') = (\|x - x'\|_K =)\ \mu([\overline{xx'}])$$

に到達する。

一般の射影距離 d に話を移す。$n=2$ のとき，d に対応して G 上の測度 μ が唯一つ存在して、一般化された Crofton 公式 (3.4) が成立する。(3.4) を通じて，G 上の測度 μ から射影距離 $d_\mu(x,x') = \mu([\overline{xx'}])$ を構成する方法は，Blaschke-Busemann 構成と呼ばれる（[17]）。μ は条件

(3.5) $$0 < \mu([\overline{x_0 x}]) < \infty,\quad \lim_{x \to x_0} \mu([\overline{x_0 x}]) = 0,\quad \forall x_0, x \in R^n,$$

を満たさなければならない。

$n \geq 3$ になると，Minkowski の norm について見たように状況が一変し、B-B 構成では不可能な射影距離も存在する（[17]）。ここで最新の結果を引用する。

定理（R. Alexander [1]）. negative type の条件 (3.2) を強めて，d は hypermetric, i.e., 任意の k, 任意の組 $x_1, \cdots, x_k, x'_1, \cdots, x'_k, x'_{k+1} \in R^n$ に対して，

(3.6) $$\sum_{1 \le i < j \le k} d(x_i, x_j) + \sum_{1 \le i < j \le k+1} d(x'_i, x'_j) \le \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k+1} d(x_i, x'_j)$$

を課すと、R^n 上の射影距離 d に対応して条件 (3.5) を満たす G 上の測度が唯一つ存在して、$d = d_\mu$ となる。

R^n 上の距離 $d = d_\mu$ が実は L^1-embeddable となっていることを見るため、超平面の全体 G から半空間 $h_{p,\omega} = \{x \in R^n ; (x,\omega) > p\}$ の集合 H_1 に移行する。対応 $g_{p,\omega} = \partial h_{p,\omega} \leftrightarrow h_{p,\omega}$ によって、G 上の測度 μ は H_1 上の測度 ν を induce し、G の部分集合 $[\overline{xx'}]$ は対称差 $[x] \ominus [x'] \subset H_1$ に対応する。つまり、(2.5) において H を H_1 に specify した式

(3.7) $$d(x, x') = \nu([x] \ominus [x']) = \| 1_{[x]}(h_{p,\omega}) - 1_{[x']}(h_{p,\omega}) \|_{L^1(H_1, \nu)}$$

を得る。こうして、$B(x)$ に対する望みの表現 (2.4) を確立する。

以上まとめて、

定理 1. 広義 Lévy の Brown 運動 B は、増分の分散 $d(x, x')$ が hypermetric（但し $n = 2$ のときは無条件）と仮定する。このとき B は次の型の表現を許す：

(3.8) $$B(x) = \int_{[x]} dW(h_{p,\omega}) = W([x]).$$

パラメータ $x \in R^n$ が任意の点において任意の方向に動くとき、新しい random element ξ が発生するという非退化（ある

いは局所的非決定性）の望ましい条件を $B(x)$ に要請すると、$dW(h_{p,\omega})$ の分散である $d\nu(h_{p,\omega})$ は十分広い support をもっていなければならない。多くの場合，ν は H_1 上の不変測度 $d\nu_0(h_{p,\omega}) = dp \otimes d\sigma_0(\omega)$ と同値，i.e.,

(3.9) $$d\nu(h_{p,\omega}) = g(h_{p,\omega})d\nu_0(h_{p,\omega}), \quad g(h_{p,\omega}) > 0 \text{ a.e.}$$

と仮定される。このとき、(3.8) は H_1 上の white noise W_0 によって

(3.8)' $$B(x) = \int_{[x]} \sqrt{g(h_{p,\omega})}\, dW_0(h_{p,\omega})$$

と書き換えられる。$g \equiv \text{const.}$ のときは、§1, (1.3) に帰す。

直線上にパラメータを制限すれば加法性が生じる広義 Lévy の Brown 運動に対し、直線から逸れてパラメータが動き出すとどんな過程を描くかという問題に深い興味をもつ。同じ巻の別稿でこの問題に取り組む。

3-2. n-parameter の Wiener 過程

前節で展開した議論と異なり、次元 $n \geqq 2$ による本質的な相違は Wiener 過程に対しては生じない故、$n = 2$ として論じる。

半空間の集合 H_1 から自然に移行できる部分集合の system を次の方法で構成する。まず二つの方向 $\omega_1, \omega_2 \in S^1$ を固定する；簡単のため互いに直交する方向 $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ を選ぶ。$\{h_{p_1,e_1}; p_1 > 0\}$ と $\{h_{p_2,e_2}; p_2 > 0\}$ から単に和集合を作るだけでは、退化した trivial な確率場しか得られないが、共通部分

$$k_{p_1,p_2} = h_{p_1,e_1} \cap h_{p_2,e_2}\ , \quad p_1, p_2 > 0,$$

からなる集合H_2を作ると、パラメータ(t_1, t_2)を第一象限$[0,\infty)^2$に制限して、非退化なGauss確率場

(3.10) $$W(t_1,t_2) = \int_{[(t_1,t_2)]} dW(k_{p_1,p_2})$$

に到達する。

H_2上の測度νが$(0,\infty)^2$上のLebesgue測度$dp_1 dp_2$で与えられるとき、(3.10)は§1, (1.4)に帰し、2-parameterのWiener過程(Brownian sheet)を得る。一般のνに対応するWを広義Wiener過程と呼び、$E[W^2(t_1,t_2)] = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} d\nu(k_{p_1,p_2})$が$H_2$上の測度$d\nu(k_{p_1,p_2})$の分布関数を表す。多くの場合、

(3.11) $$d\nu(k_{p_1,p_2}) = g(p_1,p_2)\, dp_1\, dp_2\ , \quad g(p_1,p_2) > 0 \text{ a.e.},$$

と仮定し、

(3.10)′ $$W(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \sqrt{g(p_1,p_2)}\ \dot{W}(p_1,p_2)\, dp_1\, dp_2$$

と書き直す。

さて、H_2の構造からパラメータが二つの基本方向e_1, e_2に沿って進むとき、新しいrandom elementが常にWに加わることがわかる。つまり、増加曲線$C_\varphi = \{(t,\varphi(t)) ; t \geq 0\}$ ($\varphi(t)$は正値増加関数)上にWを制限すると、$W_\varphi(t) = W(t,\varphi(t))$は加法過程となる。

LévyのBrown運動Bとの相違は、減少曲線C_φ上への制限を考えると現われる; $W_\varphi(t)$にもはや加法性は存しない。しかし、

(3.11) の g を特別に $g(p_1,p_2)=\sum_{i=1}^{N} a_i(p_1)\,b_i(p_2)$ と specify すれば、共分散が Goursat 核の形

$$E[\,W(t,\varphi(t))\,W(t',\varphi(t'))\,]=\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t\wedge t'} a_i(p_1)\,dp_1\int_0^{\varphi(t\vee t')} b_i(p_2)\,dp_2$$

をとって、$W_\varphi(t)$ は高々 N重 Markov であることがわかる。

加えて、$g(p_1,p_2)=a(p_1)\,b(p_2)$ の場合には、別の良い性質が使える。この場合、$t_1\mapsto\tilde{t}_1=\int_0^{t_1}a(p_1)\,dp_1$, $t_2\mapsto\tilde{t}_2=\int_0^{t_2}b(p_2)\,dp_2$ とパラメータ変換を行えば、結局本来の Wiener過程 (1.4) に帰着される。

補題 2. $\overline{W}(t_1,t_2)=t_2\,W(t_1,1/t_2)$ と定めると、$\overline{W}$ は元の Wiener過程 W と同じ確率法則をもつ。

この補題から、$W_\varphi(t)\approx\varphi(t)\,W_{1/\varphi}(t)$ が従う。減少曲線 C_φ に対し、$W_{1/\varphi}(t)$ は加法過程、そして $W_\varphi(t)$ が simple Markov過程となることが示される。以上の観察をまとめて、

命題 3. (cf. 同じ巻の S_iS_i の論文)　2-parameter の Wiener過程 $W(t_1,t_2)$ を曲線 C_φ 上へ制限する。このとき、$W_\varphi(t)$ は、φ が増加 (resp. 減少) ならば、加法過程で $\int_0^t\sqrt{(u\varphi(u))'}\,dB(u)$ (resp. simple Markov 過程で $\varphi(t)\int_0^t\sqrt{(u/\varphi(u))'}\,dB(u)$) と表される。

より複雑な $\varphi(t)$ に対して、$W_\varphi(t)$ の標準表現を求める問題を別稿で論じる。

§4. white noise 表現と標準性

広義 Lévy の Brown 運動の表現 (3.8) に基礎をおいて、この節

では、Gauss確率場 $X(x)$ の表現の一般的枠組を提案し、表現の標準性を論じる。

4-1. white noise 表現

(H_1, ν) に基づく表現(3.8)から、一般的な核 $F(x,h)$, $h \in [x]$, の導入によって次のタイプの表現に到る:

(4.1) $$X(x) = \int_{[x]} F(x,h)\, dW(h).$$

X の共分散は、

(4.2) $$\Gamma(x,x') = \int_{[x]\cap[x']} F(x,h)\, F(x',h)\, d\nu(h)$$

と書かれる。

Gauss過程の標準表現の理論([7])の多次元パラメータ化を目ざして、このタイプの white noise 表現(4.1)の標準性を次のように定式化する。R^n 内の対称な凸体 K を任意に選ぶ。$0<\rho<\infty$ に対して、

$\mathcal{H}_\rho$ (resp. $\mathcal{H}_\infty$) $= \{X(x);\ x \in \rho K$ (resp. R^n)$\}$ から生成される $L^2(\Omega, P)$ の閉部分空間;

$\mathcal{W}_\rho$ (resp. $\mathcal{W}_\infty$) $= \{\int_{H_1} f(h)\, dW(h);\ f \in L^2(H_1,\nu)$, $\operatorname{supp} f \subset [\rho K]$ (resp. H_1)$\}$

と定める。ここで、$[\rho K] = \{h \in H_1;\ h \cap \rho K \neq \phi\} = \{h_{p,\omega} \in H_1;\ p \le \rho\|\omega\|_K\}$.

常に $\mathcal{H}_\rho \subset \mathcal{W}_\rho$, $0<\rho\le\infty$, が成立。

定義2. すべての ρ に対して $\mathcal{H}_\rho = \mathcal{W}_\rho$ が成立するとき、X の表現(4.1)は凸体 K に関して標準的であるという。

X と W とがそれぞれ担う情報の間の gap は、直交補空間 $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{W}_\rho \ominus \mathcal{H}_\rho$ によって測られ、$\mathcal{G}_\rho = \{0\}$ かどうか調べるのが我々の仕事である。

(3.9) の仮定の下に表現 (4.1) は又、n-parameter の white noise $\dot{W}(y)$, $y \in R^n$, による書き換えを許す；写像 $h_{p,\omega} \in H_1 \mapsto y = (p, \omega) \in R^n$ (極座標) は、部分集合 $[x]$ を $\overline{Ox}$ を直径にもつ開球 $V(x)$ に写すことに注意して、$G(x,y) = F(x, h_{p,\omega}) \sqrt{g(h_{p,\omega}) / |S^{n-1}|\, p^{n-1}}$ とおけばよい：

(4.3) $$X(x) = \int_{V(x)} G(x,y)\, \dot{W}(y)\, dy\ 。$$

R^n 上の回転 ρ を (4.3) に作用させ、$\dot{W}$ のコピー $\dot{W}_1$ を導入して、$X(\rho x) = \int_{V(x)} G(\rho x, \rho y)\, \dot{W}_1(y)\, dy$ を得るから、核 G が回転不変ならば、$X(\rho x) \approx X(x)$ となる。これを保証するため、3 変数の関数 $K(r, s, p)$, $0<p<s<r<\infty$, を導入して、$G(x,y) = K(|x|, (x,y)/|y|, |y|)$ と表す。元の表現 (4.1) の核 F 自身にこの種のものを代入すると、

(4.4) $$X(x) = \int_{[x]} K(|x|, (x,\omega), p)\, dW(h_{p,\omega})$$

を得る。

こうして $X(x)$ の解析に都合のよい核に対する回転不変性と測度に対する条件 (3.9) を仮定して、表現 (4.4) の（球に関する）標準性を次の 4-2 で考察する。

4-2. 標準性と一般化されたRadon変換

XとWの間のgap $\mathcal{G}_\rho$を調べるため、次の型の積分変換を導入する：

(4.5) $$(R^*f)(x)=\int_{[x]}K(|x|,(x,\omega),p)\,f(h_{p,\omega})\,d\nu(h_{p,\omega}),$$

(4.6) $$(R\varphi)(h_{p,\omega})=\int_{h_{p,\omega}}K(|x|,(x,\omega),p)\,\varphi(x)\,dx\,。$$

よい関数$f(h_{p,\omega})$と$\varphi(x)$を選ぶと、積分の順序交換によって、

$$\int_{R^n}(R^*f)(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_{H_1}f(h)\,(R\varphi)(h)\,d\nu(h)$$

が示される。

<u>定義3</u>. 積分変換Rを<u>一般化されたRadon変換</u>、R^*を<u>双対Radon変換</u>と呼ぶ。

各部分集合$A\subset R^n$に対し、R^*のnull space $N(A)$を

(4.7) $$N(A)=\{f(h);\ R^*f \text{ は well-defined, かつ } (R^*f)(x)\equiv 0,\ x\in A\}$$

で定義する。

<u>補題4</u>. $\mathcal{G}_\rho=\{\int_{H_1}f(h)\,dW(h);\ f\in L^2(H_1,\nu)\cap N(\rho K),\ \mathrm{supp}f\subset[\rho K]\}$。特に、$\mathrm{supp}f\subset[\rho K]$となる$f\neq 0\in N(\rho K)$が常に$\int_{[\rho K]}f^2(h)\,d\nu(h)=\infty$を満たすならば、表現(4.4)は$K$に関して標準的である。

この補題から、まず$N(\rho K)$を決定する必要がある。このためよく知られた分解$L^2(S^{n-1},\sigma_0)=\sum_{m=0}^{\infty}\oplus SH_m$を用いる；$SH_m$は$m$次の球面調和関数$\{S_{m,k}(\omega);\ 1\le k\le h(m)=\dim SH_m\}$で張られ、加法公式

(4.8) $$\frac{1}{h(m)}\sum_{k=1}^{h(m)}S_{m,k}(\theta)\,S_{m,k}(\omega)=\Phi_m^{g}((\theta,\omega)),\quad g=\frac{n-2}{2},$$

が成立する。Gegenbauer 多項式 $\{\Phi_m^g(u);\ m=0,1,2,\cdots\}$ は、$L^2([-1,1],(1-u^2)^{g-\frac{1}{2}}du)$ の中の直交系をなす；$\|\Phi_m^g\|^2_{L^2((1-u^2)^{g-\frac{1}{2}}du)}=c_m$ とおく。

補題5. 次の展開が成立：

$$K(r,r(\theta,\omega),p)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m(r,p)\frac{1}{h(m)}\sum_{k=1}^{h(m)}S_{m,k}(\theta)S_{m,k}(\omega)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m(r,p)\,\Phi_m^g((\theta,\omega)),$$

ここで、$\lambda_m(r,p)=\frac{1}{c_m}\int_{p/r}^{1}K(r,ru,p)\,\Phi_m^g(u)\,(1-u^2)^{g-\frac{1}{2}}du$，$r>p$。

補題5を(4.4)に適用して、

(4.9) $$X(r,\theta)=\sum_{m,k}\frac{S_{m,k}(\theta)}{h(m)}\int_{(0,r]\times S^{n-1}}\lambda_m(r,p)\,S_{m,k}(\omega)\sqrt{g(h_{p,\omega})}\,dW_0(h_{p,\omega})$$

と展開できる。その上、ω によらない密度 $g(h_{p,\omega})=g(p)$ を選ぶと、直ちに McKean([12])の展開が従う：

(4.10) $$\begin{cases} X(r,\theta)=\sum_{m,k}M_{m,k}(r)\,S_{m,k}(\theta),\\ M_{m,k}(r)=\int_{S^{n-1}}X(r,\omega)\,S_{m,k}(\omega)\,d\sigma_0(\omega)=\frac{1}{h(m)}\int_0^r\lambda_m(r,p)\sqrt{g(p)}\,dB_{m,k}(p). \end{cases}$$

ここで、$B_{m,k}(t)=\int_{(0,t)\times S^{n-1}}S_{m,k}(\omega)\,dW_0(h_{p,\omega})$ はたがいに独立な標準 Brown 運動。このとき、$X(x)$ の表現(4.4)の球に関する標準性は、上の $M_{m,k}(r)$ の表現がすべて標準的となることと同値。

さて、球 $V=\{|x|\le 1\}$ に関する null space $N_\rho=N(\rho V)$ を決定する位置に立つ。今のところ核 K に関してさらに形を制限せざるを得ぬ(関連する積分変換の研究として[15]参照)：

(4.11) $$K(r,s,p)=a(r)\,J(s,p),\quad a(r)>0,\quad J\text{ は Volterra 核},$$

を以下仮定しよう。

任意の $f\in N_\rho$ をとって、$f(h_{p,\omega})\,g(h_{p,\omega})=\sum_{m,k}f_{m,k}(p)\,S_{m,k}(\omega)$

と分解せよ。このとき、

$$(R^* f)(r,\theta) = a(r)\int_{(0,r)\times S^{n-1}} J(r(\theta,\omega),p)\left(\sum_{m,k} f_{m,k}(p) S_{m,k}(\omega)\right) dp\, d\sigma_0(\omega)$$

$$= a(r)\sum_{m,k} S_{k,m}(\theta)/h(m)C_m \cdot \int_0^r f_{m,k}(p)\,dp \int_{p/r}^1 J(ru,p)\,\Phi_m^g(u)(1-u^2)^{g-\frac{1}{2}}du$$

と計算でき、

(4.12) $$\int_0^1 \Phi_m^g(u)(1-u^2)^{g-\frac{1}{2}}du\int_0^{ru} J(ru,p)\,f_{m,k}(p)\,dp \equiv 0\,,\quad 0<r\le \rho\,,$$

が従う。上式は、関数 $(Jf_{m,k})(t) = \int_0^t J(t,p)\,f_{m,k}(p)\,dp$ の Gegenbauer 変換であり、Ludwig [11] の定理を適用して、

結論： $(Jf_{m,k})(t) = \sum_{j=1}^{[\frac{m-1}{2}]} a_{m,k,j}\, t^{m-2j}$,　$0<t\le\rho$,

に到る。

第一種の Volterra 方程式

(4.13) $$\int_0^t J(t,p)\,\varphi(p)\,dp = t^l\,,\quad 0\le t\le\rho\,,$$

の解を $\varphi_l(t)$, $l=1,2,\cdots$, と書く。

命題 6. 核 K に関する上記の仮定の下で、R^* の球に関する null space N_ρ の中で $\mathrm{supp}\, f\subset[\rho V]$ となるものは、$\{\varphi_{m-2j}(p)S_{m,k}(\omega)/g(h_{p,\omega})\,;\ m\ge 3,\ 1\le k\le h(m),\ 1\le j\le[\frac{m-1}{2}]\}$ によって生成される。

表現 (4.4) の標準性はこうして、補題 4 から、任意の $\rho>0$, 任意の組 (m,k,j) に対し、

$$\int_0^\rho\int_{S^{n-1}} \varphi_{m-2j}^2(p)\, S_{m,k}^2(\omega)\,(g(h_{p,\omega}))^{-1}\,dp\,d\sigma_0(\omega) = \infty$$

を check することに帰着される。この事は g^{-1} の挙動に大きく依存する。

主張 7. i) $g(h_{p,\omega})\le b(p)$, $b(p)>0$ は $p\downarrow 0$ と共に急減少，の

場合には，$\mathcal{G}_p=\{0\}$, i.e., 表現 (4.4) は球に関して標準的である。
ii) $b(p)^{-1} \le g(h_{p,\omega}) \le b(p)$, $b(p)>0$ は多項式，の場合には，$\dim \mathcal{G}_p = \infty$, i.e., 表現 (4.4) は標準的でない。

i) のように標準性を主張するのに，急減少関数を密度 g に選ぶ idea は，韓国の K-S. Lee に負う。Volterra 核 J に関するなるべく緩い仮定の下，(4.13) の解 $\varphi_\ell(t)$ の挙動を調べて，主張7の証明をここに与えることは断念する（$J\equiv 1$ の場合は，[14] を見よ）。

4-3. Lévy の determinism

これまでのパラメータ空間 R^n を $n\uparrow\infty$ として，Hilbert 空間 $L^2(R^1)$ に移行し，(4.4) に類似の表現

(4.14) $$X(x)=\int_{H_1} K(|x|, (x,\omega), p)\, dW(h_{p,\omega}), \quad x\in L^2(R^1),$$

を構成する。ここで，$p\in R^1$, $\omega\in E^*$（$E\subset L^2(R^1)\subset E^*$）。$\omega$ の動く空間 E^* の選択は，(S^{n-1}, σ_0) の ∞ 次元版として white noise measure (E^*, μ) ([8]) を想定することからくる。(E^*, μ) 上の $N(0,|x|^2)$-確率変数 (x,ω) を用いて，半空間 $h_{p,\omega}=\{x\in L^2(R^1);\ (x,\omega)>p\}$ を定める。核 $K(r,s,p)$ の support についての制限は設けなくてよい。このような表現 (4.14) を許す $X(x)$ の典型は，もちろん Lévy の original な Brown 運動 ([9], [10]) で，$K(r,s,p)=1_{\{s\wedge 0<p<s\vee 0\}}(s,p)$, $d\nu(h_{p,\omega})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, dp\, d\mu(\omega)$ と選んで実現される。

パラメータ空間の次元 n が有限か無限かに従って、$X(x)$ の確率論的性質は大きな差異をみる。これは、多次元パラメータの Brown 運動 $B(x)$ の研究過程において P. Lévy が発見したもので、Lévy の determinism と呼ぼう。

主張 8. 核 K と密度 $g(h_p,\omega)$ についての強くない仮定の下で、

i) $n<\infty$ の場合： $\mathcal{H}_\rho$ は $\rho\uparrow\infty$ と共に、$\bigcap_{\rho>0}\mathcal{H}_\rho=\{0\}$ から全空間 $\mathcal{H}_\infty$ まで単調に増大する；

ii) $n=\infty$ の場合： $\mathcal{H}_\rho=\bigcap_{\rho>0}\mathcal{H}_\rho=\mathcal{H}_\infty$ と一定である。

$L^2(E^*,\mu)$ の Hida 解析 (cf. [18]) を応用して、ii) の証明を与えるには別の機会を待つことにしたい ([13] では全く異なるアプローチで Lévy の determinism を研究した)。

References

[1] R. Alexander, Zonoid theory and Hilbert's fourth problem, preprint.

[2] M. Aschbacher, P. Baldi, E. B. Baum and R. M. Wilson, Embeddings of ultrametric spaces in finite dimensional structures, preprint.

[3] P. Assouad and M. Deza, Metric subspaces of L^1, Publications math. d'Orsay, Université de Paris-Sud, 1982.

[4] N. N. Chentsov, Lévy Brownian motion of several parameters and generalized white noise, Theory Probab. Appl. 2 (1957), 265-266.

[5] A. Ephremides and J. B. Tomas ed., Random processes. Multiplicity theory and canonical decompositions, Dawden, Hutchison and Ross. Inc., 1973.

[6] X. Guyon and B. Prum, Proprietes Markoviennes de certains processus a indice dans R^2, Publications math. d'Orsay, Université de Paris-Sud, 1979.

[7] 飛田武幸・櫃田倍之, ガウス過程, 紀伊国屋, 1976 (第二刷 1987).

[8] 飛田武幸, ブラウン運動, 岩波書店, 1975 (第二刷 1984)。

[9] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948 (第二版 1965).

[10] P. Lévy, Oeuvres de Paul Lévy, IV and V, Gauthier-Villars, Paris, 1980.

[11] D. Ludwig, The Radon transform on Euclidean space, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 49-81.

[12] H. P. McKean, Brownian motion with a several-dimensional time, Theory Probab. Appl. 8 (1963), 335-354.

[13] A. Noda, Lévy's Brownian motion; Total positivity structure of M(t)-process and deterministic character, Nagoya Math. J. 94 (1984), 137-164.

[14] A. Noda, Generalized Radon transform and Lévy's Brownian motion, I. and II., Nagoya Math. J. 105 (1987), 71-87 and 89-107.

[15] E. T. Quinto, The invertibility of rotation invariant Radon transforms, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983), 510-522. Erratum, 94 (1983), 602-603.

[16] R. Schneider and W. Weil, Zonoids and related topics, in Convexity and its applications (P. Gruber and J. M. Wills ed.), Birkhäuser, Basel, 1983.

[17] Z. I. Szabó, Hilbert's fourth problem, I, Advances in Math. 59 (1986), 185-301.

[18] L. Streit and T. Hida, Generalized Brownian functionals and the Feynman integral, Stochastic Process and Appl. 16 (1983), 55-69.

[19] M. Talagrand, Regularity of gaussian processes, Acta Math. 159 (1987), 99-149.

[20] M. Yor, Remarques sur certains constructions des mouvements browniens fractionnaires, Séminaire de Probabilités XXII, Lect. Notes in Math. 1321 (1988), 217-224, Springer.